Авторы: С.В. Ермаков, А.А. Попов

Дополнительное математическое образование как условие развития математической одарённости

Математическая одарённость рассматривается как компетентностная характеристика подросткового и юношеского возраста, основанная одновременно на актуализации сообразных возрасту форм продуктивной деятельности разворачиванию этой деятельности на основе структуры профессиональных математических задач. Этим заявленный подход отличается от натуралистического представления об одаренности (в том числе в конкретной предметной области) как качества, присущего человеку самому по себе, измеряемого в образовании академическими показателями.

Рассматриваются образовательные подходы и формы, обеспечивающие первичный интерес детей к математике, включение одарённых подростков и юношей в действительность математики. Обсуждаются как традиционные подходы, по преимуществу просветительского и академического характера, так и современные формы, основанные на включение в продуктивную деятельность.

Поддержка математической одарённости рассматривается одновременно как самостоятельная ценность — поскольку математика является одним из высших достижений человеческого разума и одной из высших форм самореализации человека как мыслящего существа — и как условие включения перспективных подростков в сложные практики, связанные с прикладными математическими разработками.

Математика как наука и как деятельность

Начиная с периода оформления математического знания как *особенного*, в античную эпоху, и особенно в дискуссиях о применимости математики к познанию объективного мира, сопровождавшими становление европейской науки, был выделен парадокс, задающий уникальность математики в системе наук. Он захватывает специфику математики как профессии, преподавания математики и понимания того, что делает человека способным или не способным к математике и её применению.

С одной стороны, математическое знание — наиболее обобщённое знание об *объективно существующих* пространственных формах, о величинах и их выражении с помощью чисел. Пространственная форма материальна, поскольку является формой некоторого материального тела. Число материально, поскольку является результатом измерения характеристик материальных тел или их соотношений.[1]

Но такое понимание не в состоянии объяснить, почему математика описывает не только саму по себе объективную действительность, но и сконструированные человеческим разумом машины, более того, позволяет конструировать новые машины,[2] в том числе такие, существование которых не вытекает ни из каких природных законов[3] — замысел этих машин возникает сперва в мышлении инженера на основе математических конструкций, а уже затем воплощается в материале.

С другой стороны, ещё в античности возникло представление о математических сущностях (числах и фигурах) как об особом мире. В этом мире существуют идеальные

---

[1] «Чистая математика имеет своим объектом пространственные формы и количественные отношения действительного мира» [36].

[2] Так, термодинамика позволет рассчитывать оптимальные конструкции тепловых машин, на основе уравнений электродинамики создана радиотехника с особой математической теорией.

[3] Например, вычислительные машины, логика проектирования и программирования которых не зависит от физической элементной базы.

отношения пропорции и гармонии, он требует особой духовной концентрации для своего изучения, а знания об этих идеальных отношениях божественны по своей природе, но могут быть использованы для *совершенствования* реального мира.

Независимо от задач, поставленных в реальном мире, такая математика — род интеллектуальных упражнений, задающих меру образованности человека, его способности к отвлечённым размышлениям и рассуждениям, способ постижения всеобщих законов.[4]

Первая попытка синтеза этих подходов исторически связывается с именем Архимеда. Именно он одновременно использовал математику для точного описания природных законов (вычисление плотности тела через соотношение с плотностью воды того же объёма), для конструирования механизмов (винт, системы блоков) и решал задачи, приведшие впоследствии к исчислению бесконечно малых (например, оценка числа π и выражение объёмов тел вращения через это число).

Но впоследствии эти подходы разделились на прикладную, *инженерную*, математику и математику *академическую*, воспроизводившую схему аксиоматической теории как *чистого*, ничем не обусловленного знания.

Инженерная математика — *исчисление*, набор правил преобразования форм и величин (а затем и высказываний о формах и величинах — алгебраических формул) в их применении к классам практических задач. Академическая — *рассуждение*, позволявшее уточнять существующие утверждения и обнаруживать новые, в том числе путём свободного мысленного конструирования новых объектов и исследования их законов.

Проект конструктивного синтеза, *снимающего* парадокс, был предложен И. Кантом.[5] Основа этого синтеза — представление любого знания как результата *деятельности*, формирующей действительный мир, и *рефлексии*, обнаружения законов самой деятельности в её столкновении с миром.

Так, количество и порядок — это количество и порядок единичных актов *обнаружения* предметов счёта, в развитой форме — *измерения*, где значимая величина выделяется в деятельности, а не является характеристикой самого объекта. Точно так же форма есть результат *оформления*, выделения значимого объекта в пространстве. Обнаруженные в рефлексии законы построения меры и формы —отправная точка для построения всей системы математического знания.

В предложенном подходе *необъяснимая эффективность математики в познании законов природы* [14] и *эффективность применения математики в изобретениях человеческого ума* [9] — равно следствие того, что деятельность, сталкиваясь с миром явлений, оформляет его по собственным разумным законам, представляющих собой структурные принципы организации самой деятельности. В целом математика может рассматриваться как порождающая модель возможных миров, как миров мышления, так и миров, в которых разворачиваются жизненные практики [2, 12].

---

[4] Первый аспект подробно рассмотрен Платоном в диалоге «Теэтет» [24], где обсуждается идеальный характер объекта математического размышления как упражнения в способности свободного созерцания, не обусловленного никакими житейскими интересами. Второй аспект — описание *математически прозрачной* конструкции мира, составленной из идеальных сущностей, разворачивается в диалоге «Тимей» [25] и задаёт идеал математического познания мира в целом. Так, анализируя принципы мышления математической физики, В. Гейзенберг отмечает, что *фундаментальные симметрии*, лежащие в основе современной научной картины мира, существенно ближе к *совершенным телам* Платона, чем к каким-либо пространственным телам и величинам, обнаруживаемым в действительности [5].

[5] Прежде всего, в «Пролегоменах…» [13], в разделах «Как возможна чистая математика» и «Как возможно чистое естествознание».

В развитой форме этот подход к анализу математического знания и к построению математического образования был осуществлён в XX веке, с опорой как на исторический материал, так и на современную математику, её научные и инженерные приложения.

Как основная единица математического мышления была выделена *задача* [1]. Именно решая задачи, математик применяет разумные законы, априорные схемы мышления к предметам, встречающимся в практической деятельности, может описать их структуру и свести закономерности структур к формам и величинам. Задача появляется из практической *ситуации*, в которой возникает неразрешимая трудность — одновременно невозможность совершить эффективное действие и отсутствие знания о том, как действие может быть совершено.[6] В структуре ситуации должны быть выделены существенные характеристики деятельности и её предмета, построена *модель*, представляющая эту структуру в знаковой, зримой форме, в виде отношений известного и неизвестного.

Уже известные законы позволяют сформулировать это отношение в виде *математической модели*, при необходимости — на основе известных законов вывести новые, характеризующие именно эту модель.[7] Зная законы, можно вывести неизвестные величины и формы из известных; при частом употреблении сходных моделей нужные рассуждения могут быть сведены в единую систему со своими правилами, которые могут быть формализованы до *исчисления*. В идеале таким исчислением должен мочь воспользоваться и дилетант, не понимающий происхождения правил и сущности объектов, к которым эти правила применяются, но достаточно освоивший приёмы рассуждений, чтобы на основе исходных данных получить необходимый результат.

Наиболее распространённой формой такого исчисления является арифметика. Даже неграмотный человек может выполнить элементарный финансовый расчет, опосредствованный знаковой формой монет и купюр, правилами суммирования и вычитания.

Интересно отметить — профессиональные математики (и преподаватели математики), увлекаясь работой с формальной стороной математической модели, часто не обращают внимания на то, что результат должен быть ещё *интерпретирован*, отнесён к практической ситуации и использован для эффективного достижения результата.

Отсюда, во многом, сложившаяся репутация математики как деятельности, отвлечённой от жизни, и существующее внутри профессионального сообщества разделение на *чистых* и *прикладных* математиков — первых интересуют, прежде всего, законы построения и преобразования математических моделей, вторые ориентированы на практический результат и ради него готовы пренебречь строгостью рассуждений.

Математика как предмет образования

Типологию подходов, сложившихся из разных философских традиций осмысления математики и их интерпретацию в дидактике, можно строить по двум основаниям.

1. *Содержательное* и *формальное*.

В первом случае математика строится как практика созерцания и исследования сложных объектов, часто идеальных по своей природе, не имеющих отношения к действительности, но в любом случае позволяющих выстроить вокруг себя собственную действительность, в том числе эстетическую (правильные тела [22] и фракталы [10]).

Во втором случае математика предстаёт как система преобразований сложных последовательностей символов, подчинённых определённым правилам. Эти правила

[6] Исторически первая описанная задача — восстановить поле, которое даёт *то же количество зерна*, что и предыдущее, границы которого смыты разливом реки. Необходимо связать количество зерна с пространственными характеристиками поля (связать площадь с формой и размером) [31].

[7] Обращаясь к упомянутому примеру — на основе известных отношений для полей прямоугольной формы найти отношения для полей в форме треугольников и трапеций.

также имеют свою эстетическую составляющую (так, математики и физики-теоретики часто говорят об особой «красоте формул»), но сама необходимость работать со сложными высказываниями без понимания их предмета задаёт определённый *порог входа*. На практике именно по возможности школьника преодолеть этот порог учителя судят о *способности* или *неспособности* к математике.

2. *Эмпирическое* и *теоретическое*.

В первом случае математические объекты представляют собой формальные обобщения тех объектов, с которыми ребёнок сталкивается в жизненной практике. Так, круг обобщает колесо, Луну и обруч. Прямоугольник — лист бумаги, окно, экран телевизора или компьютера. Число «два» — две ноги, пару ботинок, повторение действия. Этот подход популярен в дошкольном и младшем школьном обучении; поскольку ребёнок в этом возрасте ещё не умеет различать искусственное и естественное, он не задумывается о том, что круги в природе встречаются достаточно редко, а прямоугольники не встречаются вовсе.

Во втором же случае математические объекты строятся как конструкции человеческого разума и результаты специально организованного действия. Так, круг есть результат применения циркуля, или другого инструмента, выполняющего ту же функцию (например, вращательного движения кисти руки), число появляется при подсчёте повторений одного и того же действия или события, в том числе число как результат многократного приложения меры к измеряемой величине.

Отметим, что если формальное определение объекта позволяет лишь *идентифицировать* его, то содержательное, конструктивное определение позволяет его построить, при заданных условиях.

Из этих двух оснований можно выстроить типологию реальных подходов в образовании, по-разному интерпретирующих содержание и смысл математики.

1. Содержательно-эмпирический (популярный) подход используется по преимуществу при первоначальном знакомстве ребёнка с математическими объектами и понятиями, основан на многократном воспроизведении встречи ребёнка со специально сконструированными объектами, воплощающими идеи *порядка*, *количества*, *равновесия* — те идеи, которые нужны современному человеку в повседневной практике.

При всей продуктивности этого подхода, его органичности и эстетической привлекательности, его ограничение — именно то, что ребёнок не воспринимает отношения и моделирующие их конструкции как искусственные. Как следствие — инженерно и экономически (с использованием математических понятий) выстроенная среда с большой вероятностью не то, что однажды сконструировано — и может быть подвергнуто критике и реконструировано, в отличие, например, от Луны.

2. Формально-эмпирический подход хорошо работает при освоении нумерации и счёта — от номеров домов до расчёта цен. Позволяет взрослеющему человеку освоиться с различными формальными системами, начиная с арифметики и заканчивая правилами использования технических устройств, каждое из которых, от автомобиля и системы дорожного движения до компьютера, требует освоить некоторое *исчисление*.

Но «порог вхождения» определяется способностью освоить определённое исчисление, принять его как систему правил, помогающих в практической деятельности. С одной стороны, в процессе образования это приводит к определённым психологическим трудностям, в частности, к появлению феномена *неуспешного школьника* — но, с другой стороны, может гарантировать однозначные критерии освоения формальных систем.

Поскольку освоение формальной системы достаточно легко проверить, этот подход используется в массовой системе оценки образовательных результатов.

В то же время преобладание этого подхода в массовом преподавании математики приводит к тому, что сложная конструкция математической задачи редуцируется к освоению системы формальных преобразований математических моделей. А рекордный уровень математических способностей (то, что считается математической одарённостью в массовой педагогической практике) сводится к виртуозному владению аппаратом формальных преобразований — таких как решение уравнений, упрощение выражений, кодирование алгоритма на определённом языке программирования.

3. Формально-теоретический (академический) подход делает акцент не на преобразования, а упражнение способности получения новых утверждений и обоснования утверждений уже существующих.

Сохранились легенды о том, что ещё Фалес упражнялся в обосновании, в том числе, утверждений достаточно очевидных. Уже во времена Платона такая практика устоялась; математика как упражнение в обосновании и поиске новых отношений при анализе идеальных объектов рассматривалась как первый шаг любого образования. Такая математика, систематизированная на основе формальной логики, стала содержанием первой *науки* в современном смысле, геометрии Эвклида.

Обозначенный системой математического знания «порог вхождения» был декларирован самим Эвклидом: *в геометрии царских путей нет*. Основное требование — умение видеть неявные отношения в структуре идеальных объектов, соотносить их с уже известными знаниями и делать выводы об этих отношениях на основе анализа единичного объекта и применения всеобщего знания, сформулированного в аксиомах и теоремах.

В такой деятельности воспроизводится значительная часть структуры математической задачи — с тем ограничением, что действительные практические ситуации уже заранее замещены идеальными математическими объектами и моделями. Кроме того, в академическом подходе новое знание появляется лишь как следствие любознательности и комбинаторного искусства, за счёт конструирования новых, ещё не исследованных идеальных объектов[8]

Кроме того, обобщённое теоретическое знание, представленное как *особенная ценность*, создаёт очевидный культурный разрыв между элитными сообществами, способными создавать или воссоздавать математическое знание, и сообществами, профессионально использующими математическое знание, представленное эмпирически.

В частности, ученик, не имеющий вкуса к выполнению формальных преобразований, оказывается неуспешным в изучении математики, а успешный школьник, в особенности у «сильных» учителей, превращается в своего рода автомат по решению задач определённого типа.

4. Содержательно-теоретический подход основан на интерпретации *задачи* не только как дидактической единицы, позволяющей выстроить процесс освоения и понимания математики одновременно как знания о специфических идеальных объектах и формальных системах высказываний и как способа появления и применения этого знания в практической деятельности.

В *чистой* математике, особенно в её разделах, традиционно считающихся пограничными (теория вероятностей, теория дифференциальных уравнений, математическая логика, теоретическая информатика) на основе этого подхода произошёл переход от исследования отдельных объектов к исследованию задач — условий их разрешимости, методов оценки эффективности решения, конструирования частных алгоритмов и оценки их результатов.

В математическом образовании прорыв был связан с построением *теории учебной задачи* [8], позволяющей воспроизвести в «школьной» ситуации, даже на материале, доступном первоклассникам, всей цепочки перехода от практической трудности к

---

[8] Именно этот путь считается единственным достойным путём развития *чистой* математики.

построению математической модели, исследованию её свойств и формированию математического формализма.

Несмотря на то, что наиболее завершённом виде этот подход реализован лишь в начальном обучении, существуют разработки, представляющие всю цепочку движения по схеме задачи и исследование *задачи* как основного объекта математического мышления.[9]

Математическая способность и возможности её развития

В эмпирическом понимании способность к математике (как и другие способности, связанные с освоением сложных формальных систем знания) рассматривается как сравнительная лёгкость преодоления учеником «порога вхождения»; «одарённость» же проявляется, если такой порог вообще не воспринимается учеником. Способный, или одарённый, ученик — прежде всего, тот, кто с лёгкостью осваивает новые предметные знания и быстрее выполняет новые задания [18]. В пределе такой ученик способен даже совершить новое личное открытие (повторяющие открытия, уже произошедшие в истории науки, но ученикам соответствующего возраста заведомо не известные).

Такие феномены зафиксированы в биографиях многих выдающихся математиков — так, Карл-Фридрих Гаусс[10], будучи школьником второго класса, открыл закон суммирования арифметической прогрессии; Блез Паскаль в детстве самостоятельно доказал значительную часть теорем евклидовой геометрии; Софья Ковалевская изучила высшую математику по конспектам лекций, которыми из экономии её отец велел обклеить детскую, вместо обоев.

Понимание способности как того, что присуще ученику заранее, может быть подвергнуто критике уже формально–логически. Так, возникает вопрос, существовала ли особенная математическая способность до того, как математика сформировалась как отдельная область культуры. По мере развития математики и дифференциации математического знания (особенно с появлением информатики и компьютерного программирования) обнаруживается также различие лёгкости освоения разных разделов науки, особенная ориентация отдельных учеников на красивые конструкции, не имеющие отношения к практике, или на применение знаний при решении практических задач.[11] Естественно предположить, что эта дифференциация — культурный феномен.

Современная психология (в том числе исследования, задающие основание новых подходов в образовании) в целом отказалась от таких натуральных представлений. Математическая способность рассматривается в её *генезисе*, как результат освоения учеником всё более сложных форм мышления и деятельности. Признано, что способность *являет себя* не столько в работе с готовым знанием, сколько в процессе решения задач.

Рассмотрим математическую способность, опираясь на структуру задачи.[12]

Первым уровнем развития способности является *ситуативное решение*, возможность в конкретной единичной ситуации найти действие, разрешающее трудность и позволяющее найти ответ на вопрос. На материале таких ситуативных решений, особенно в задачах, не требующих специального знания, но позволяющих легко

---

[9] Из учебников для высшей школы можно отметить, например, [1].

[10] Эта история подробно проанализирована в психологической литературе, например, [4, 11].

[11] Первый тип отношения отчётливо характерен для математиков, прославившихся головоломками и поиском неочевидных закономерностей, например, в узорах и в целом визуальных композициях (наиболее известный и доступный школьникам пример — золотое сечение). Второй характерен для учёных, склонных к конструированию и решению задач, пограничных для математики; такой тип отношения хорошо показан, например, в воспоминаниях нобелевского лауреата по физике Р. Фейнмана [34].

[12] Мы несколько «спрямляем» модели, выстроенные в рамках гештальт–теории [4], генетической эпистемологии [23], культурно-исторической теории [11].

реконструировать и преобразовывать структуру объекта, экспериментально обнаруживаются феномены, уже ставящие под вопрос натуральное представление:

— есть задачи, решаемые эффективнее маленькими детьми, чем школьниками или взрослыми, имеющими высокие академические показатели [4];

— успешному решению предшествует исследование отношений внутри задачи, не имеющее прямого отношения к ответу или практическому действию; те, кто тратит дополнительное время на такое исследование, эффективно решает уже не одну задачу, а класс задач. По метафорическому определению А. К. Дусавицкого, не путешествует по ущельям, а поднимается на вершину, чтобы обозреть окрестности целиком [11].

Эти феномены демонстрирую переход от ситуации к модели. В предметной ситуации всё сводится к единичному решению, на уровне модели можно выделить *способ* деятельности, выраженный в терминах модели и её математического описания. В этом подходе *способный* человек —тот, кто умеет найти, выстроить способ. Можно выделить способность как следующий уровень обобщения, по отношению к предметному действию и способу, и рассматривать её как качество, позволяющее находить новые способы.

Для этого, ученик должен регулярно помещаться в ситуации, требующие нахождения новых способов решения задач — они могут быть связаны и с исследованием математических объектов самих по себе, обнаружением их неочевидных закономерностей, и с нахождением математических законов в практических ситуациях.

Далее, необходимы задачи такого уровня сложности, которые не могут быть решены без кооперации и коммуникации. Это позволит освоить математический язык и математическую аргументацию, культуру обоснования как необходимое условие продуктивной совместной деятельности; кроме того, позволит выделить разные позиции, интериоризируемые затем в профессиональном математическом мышлении.[13]

Отдельно можно выделить оформление полученного результата, не только в культурной форме описания исследовательской работы, но и в культурной форме учебного текста, адресованного «тем, кто не знает».

Возрастные условия, задачи и результаты математического дополнительного образования

Возрастные особенности при формировании математической способности связаны как с организацией мышления и восприятия в разных возрастах, со спецификой ведущей деятельности и социальной ситуации развития, так и с ожиданиями по отношению к образовательным результатам. Эти ожидания вытекают из того, рассматривается ли математическое знание в первую очередь как всеобщая культурная ценность, как условие включения в мир современной техники и технологий или как условие профессиональной деятельности, связанной с решением математических задач.

Как отмечено, способность появляется и проявляется только в деятельности, предполагает постановку собственных целей или принятие внешних целей как своих; поэтому мы рассматриваем возрастные этапы как этапы становления субъекта деятельности, в общей логике культурно-исторического подхода [29].

Ключевая характеристикой, определяющая субъекта, рассматривается *компетентность* как единство способности и готовности к действию [28, 30].

Дошкольный возраст.

Основное содержание: освоение объективного мира как мира человеческих отношений, правил, в том числе как игровых сюжетов. Объективные законы ещё не

[13] Наиболее полно спектр этих позиций в решении конкретной сложной математической задачи — доказательство и обобщение теоремы Эйлера для многогранников — описан И. Лакатосом [16].

различены с социальными конвенциями. Правила счёта, законы формы, симметрии, пропорций, равновесия воспринимаются как правила игры, ролевой и предметной.

Задача освоения научного знания в этом возрасте ставиться не может. Важно удержать детскую любознательность, наполнить опыт не только впечатлениями, но и основными объективными закономерностями, в том числе позволяющими решать элементарные практические задачи. Знакомство с математическими понятиями в этом возрасте *дополнительно* в отношении к общим задачам образования. Наиболее эффективным представляется содержательно-эмпирический подход, с элементами формально-эмпирического (ниже мы ещё скажем о роли занимательности).

Младший школьный возраст.

Основное содержание: знание о предметном мире и его законах отделяется от знаний о социальных конвенциях. *Учитель,* в отличие от *воспитателя,* выступает от имени объективной действительности и её законов.

Традиционно в этом возрасте общепринят формально-эмпирический подход. Школьник осваивает действия счёта, правила арифметики и обращение с основными фигурами, посредством обобщения применения чисел к сериям эмпирических объектов и манипуляций с количествами по правилам арифметики.

Содержательно-теоретический подход, доказавший свою эффективность в практике Развивающего Обучения, требует одновременно достаточно сложной квалификации от учителя и культурной среды (может быть, культурной истории) ученика, в которой поощряются любознательность и готовность задумываться о не очевидных связях и отношениях в предметном мире.

В дополнительном образовании важна эстетическая сторона математики. Исследование симметрий и пропорций может быть заведомо не привязано к «школьным» контекстам (что позволяет преодолеть «порог вхождения», показать красоту и привлекательность математики школьникам, формально к ней не способным). И позволяет удержать специфику математики как интеллектуального созерцания, опирающегося на непосредственное видение и преобразования видимого объекта.

На этом материале не в меньшей степени, чем на материале измерения отношений величин (в Развивающем Обучении) возможен переход от содержательно-эмпирического к содержательно-теоретическому подходу.

Подростковый возраст.

Основное содержание: предметный мир, уже достаточно освоенный, становится поводом для конструирования новых типов социальных отношений, проб быть «почти взрослым», включаться во взрослые формы деятельности, в том числе исследование, проектирование, творчество, в *совместное* действие, для которого одинаково важны как коллектив сверстников, так и наличие значимого взрослого.

Но именно в этом возрасте в образовании преобладает формально-теоретический подход, в котором знания заведомо не связаны с практическими жизненными интересами подростка. Поэтому именно в подростковом возрасте принципиально значимо дополнительное образование, направленное на освоение культурного содержания через включение (хотя бы и игровое) во взрослые практики, общение со взрослыми, представляющими такие практики (учёными, инженерами, людьми искусства).

В этом возрасте детская спонтанность, любознательность, игры воображения начинают оформляться в *одарённость*, компетентность в освоении сложного содержания. Можно предполагать, что на её формирование влияют как социальное и культурное окружение, так и особенности образовательного опыта, позволившие этим детским качествам сохраниться и развиться, при одновременном освоении культурного материала и культурных способов деятельности.

Можно выделить основные параметры этой компетентности:

— *Воображение*. Возможность представить себе то, чего раньше не было, что равно необходимо для художника, инженера-разработчика, предпринимателя.

— *Определяющая рефлексия*. Возможность выделить задачу, различить известное и неизвестное, определить собственные возможности и ограничения, как объективные, так и связанные со знанием и незнанием.

— *Концентрация*. Возможность долго удерживать своё внимание и волю на решении одной задачи, вместе с рефлексией позволяет определять приоритеты, вместе с воображением позволяет определить значимость задач с точки зрения будущего.

Юношеский возраст.

Основное содержание: предметный мир — повод и материал для собственных действий в мире человеческих отношений. В этом возрасте человек *определяет себя* в отношении к возможной профессии (или спектру профессий), стилю жизни и будущей жизненной стратегии, системе приоритетов и условий осуществления этих приоритетов.

Совместная деятельность либо сворачивается в сложно организованный внутренний мир и деятельность, направленную на управление внутренним миром с его возможными позициями и персонажами, либо разворачивается в деятельность управления, в том числе в организацию исследований, проектирования, творчества.

В этом возрасте человек одновременно готов превратиться в машину, чётко выстроенную для решения определённых задач, и попытаться осмыслить все возможные функциональные машины, в которые он может включиться.

Дополнительное образование в этом возрасте должно быть условием уже не для проб, но для определения себя, в том числе через понимание собственных ограничений, отсутствие или принятие образа долженствования, идентификации себя с определённым делом и уже освоенным опытом.[14]

Продуктивная деятельность должны опираться не на предложенные взрослыми задачи, сюжеты и темы, но на собственные — что в современной школе невозможно. Дополнительное образование должны включать возможность обоснования выбранных направлений деятельности, анализ своих достижений из внешней позиции, позиции пользователя или эксперта, выступающего от имени культуры.

В этом возрасте одарённость проявляет себя как:

— *Коммуникабельность*. Возможность определять речевое намерение в устной и письменной коммуникации, строить тексты, соразмерные предмету высказывания, и понимать тексты; желание высказываться, желание понимать.

— *Продуктивность*. Возможность анализировать проблемные ситуации, моделировать схемы деятельности (в том числе не существующие или неизвестные) и действовать по этим схемам; претензия на появление принципиально нового содержания, на собственные научные открытия и инженерные изобретения.

— *Ситуативная рефлексия*. Возможность видеть ситуацию в целом, собственное место и места, занятые иными участниками ситуации; выделять способ действия и границу его применимости; думать за других участников ситуации. В зависимости от личностных особенностей и установок, особая отрешённость учёного либо развитая чувствительность к чужим состояниям.

---

[14] Именно в этом возрасте человек может сказать: *Я — математик*. Или: *я — инженер.* И поставить себе задачу освоения дополнительных знаний и способов, позволяющих стать математиком или инженером.

Важно отметить: именно из школьников, не вписывающихся в образовательные институты, в которых преподавание основано на формально-теоретическом подходе, и могут вырасти сильные учёные и конструкторы. Но для развития их способностей и поддержки, хотя бы в виде создания социальной среды продуктивного действия и обеспечения достаточным объёмом задач для упражнения возможности открытия новых способов, необходимо особенное дополнительное образование.

Цели и подходы в развитии математических способностей

Существующие цели были оформлены исторически как решение отдельных задач организации и разработки содержания образования. Подходы сформировались без особенного теоретического осмысления — что создаёт, в силу их распространения и укоренения в системе общего и дополнительного образования — дополнительные сложности при развитии и поддержке действительных математических способностей.

Сложившиеся подходы и их цели

В советской системе дополнительного образования сложилось два подхода к дополнительному образованию школьников в области математики, в разной степени содержательно и институционально оформленных.

Основа массового математического образования — академические формы, освоение математического знания в его «ставшем» виде, представленном в научных текстах — как совокупность определений и утверждений, разворачивающихся в своей внутренней логике. Решалась общая задача математического образования — формирование универсальных компетентностей через освоение математического знания[15].

Например, освоение отношений порядка, сравнения и меры — через арифметику. Освоение анализа и синтеза и культуры доказательных рассуждений — через геометрию. Освоение точного и последовательного применения известных правил — через алгебру.

Дополнительное образование требовалось в двух случаях:

1. Занимательность, направленная на приобщение к математическому знанию тех, кто ещё не готов для работы с его академическими формами, формирование предварительных представлений о характере математического знания, специфике математических объектов. *Занимательная* форма реализует содержательно-эмпирический подход к содержанию и, в силу конфликта с формальными подходами, воспринимается массовой практикой как нечто не серьёзное.

В основании подхода — противоречие между необходимостью формирования у школьника картины мира, в которой научное знание связано и с исследованием природы и с созданием техники на основе познанных законов, и академическим представлением математики как мира идеальных сущностей, не имеющих отношения к действительности.

Политехническая школа — как и предшествовавшая ей трудовая школа — требовала максимально широкого освоения не только азов математического знания, но и сложных математических понятий, применимых в современной технике и в современной повседневности, причём именно на уровне применения или хотя бы узнавания.[16]

В то же время академический подход к преподаванию был ориентирован на представление математики как замкнутого мира со своими объектами (не имеющими отношения к объектам реальной действительности) и правилами рассуждения, не похожими на правила анализа ситуаций и принятия решений в практической

---

[15] Квинтэссенция этого подхода — тезис М. В. Ломоносова, «математика хороша уже тем, что ум в порядок приводит», присутствующий видимо, в каждом школьном кабинете математики.

[16] Не касаясь эксплуатации сложной техники, можно привести как примеры отрицательные числа при применении градусной меры температуры, координатную сетку при ориентации на карте, евклидову геометрию при обустройстве жилого помещения и разметке земельного участка.

деятельности. Преобладание этого подхода (унаследованного из классической гимназии и университета) приводило к иллюзии оторванности математики от жизни, бесполезности её изучения для практики. Это сказывалось, в частности, на отношении к математике студентов инженерных дисциплин и профессионалов, для которых было принципиально качество инженерного образования и актуальность полученных студентами знаний.[17]

Цель *занимательной математики* — появление и актуализация интереса школьников к математике как особому типу знаний и роду занятий через обозначение связи математики с реальными практическими ситуациями и техническими решениями, через представление истории математики как борьбы идей и реальных жизненных драм либо как приключения в сказочном математическом мире.

Формы реализации, по преимуществу вне системы образования:

— Научно-популярная литература: рассказ о конкретных математических понятиях и законах, об обстоятельствах их появления и открытия, о спектре полезных приложений (включая биографии учёных, делавших открытия, и исторических обстоятельств появления конкретных задач и способов их решения).

— Научно-приключенческая литература: помещение героя в реальный или вымышленный мир, где каждое приключение связано с решением конкретной задачи, применением понятия либо обнаружением артефакта, который реализует математическую схему и может быть применён только при условии понимания этой схемы. Часто использовались сказочные персонажи, либо математические по своему происхождению, как «кубарик» (лошадь из кубиков) [17] или «нолик» [20], или утрированный образ учёного-математика, как «магистр рассеянных наук» [21].

— Математические головоломки (от лабиринтов для малышей до криптографических задач для подростков), решение которых ребует применения схем рассуждения, сходных со схемами рассуждения при решении математических задач. Эти головоломки регулярно публиковались в массовых детских и подростковых журналах.

Занимательная математика разворачивалась в форме культурного движения, существовавшего параллельно образовательным институтам и решающего задачи, которые ставились, но не решались этими институтами. Можно считать это движение одним из прототипов современного *неформального* образования, в котором образовательные задачи решаются культурными сообществами, особой организацией среды, насыщенной культурными артефактами — и решается не системно.

2. Рекордность, направленная на поддержку тех, кому традиционные академические формы уже не достаточны, остающаяся в рамках формально-теоретического подхода, позволял готовить решателей задач, но не тех, кто может понимать реальные практические ситуации и формулировать на их основе новые задачи.

Массовое разворачивание математической подготовки в общеобразовательной школе показало, что из всей совокупности школьников, успешных в освоении математического знания, можно выделить небольшую группу наиболее успешных.

Основные параметры, которые позволяли выделить эту группу (к сожалению, её статистическая оценка отсутствует, но по различным эмпирическим оценкам, в неё попадает около 1% школьников) [18]:

— успешное освоение решения *типовых* задач без многократного повторения;

— интерес к задачам, не являющимся типовыми, в том числе к задачам повышенной трудности и математическим головоломкам;

— способность применять математические модели и схемы рассуждений к решению задач других школьных предметов и анализу повседневных ситуаций.

[17] Характерна в связи с этим критика академиком А. Н. Крыловым преподавания математики в инженерных вузах, с избыточно скрупулёзными доказательствами и отсутствием приложений [15].

Совокупность этих качеств сопоставима с художественной или спортивной одарённостью; соответственно, по аналогии с системой отбора и подготовки в спорте и искусстве, была выстроена работа с математически одарёнными детьми и подростками.

Важно отметить следующее различие. Если в спорте и искусстве важны престиж и самореализация, то математическое образование для одарённых ориентировалось на математические и физические факультеты ведущих университетов и фундаментальное физико-техническое образование, представляло собой инвестиции в кадровый потенциал фундаментальной науки и разработок, связанных с военно-промышленным комплексом. Стратегии дополнительного математического образования определяло во многом научно-инженерное сообщество.

Цель *отбора и поддержки математически одарённых школьников* — инициация и поддержка рекордных стратегий и достижений в области математики, с выходом на отбор и раннюю профессионализацию в области точных наук и их приложений.

Выстроенная многоступенчатая система включала в себя:

— *Кружки любителей математики*. Содержание: анализ решённых в истории математики задач, приводящих к появлению эстетически значимых объектов, построенных математическими средствами, или ёмких универсальных схем, неожиданно обнаруживающихся в задачах. Назначение: отбор математически одарённых школьников, включение их в круг тем, отличных от школьной математики, формирование представления о математике как о привлекательной сфере профессиональных занятий.

— *Предметные математические олимпиады*. Соревнования по решению сложных задач, выстроенные по иерархической схеме спортивных соревнований, с поэтапным усложнением заданий. Подготовка к участию сопровождалась включением в содержание кружковой работы решения и разбора задач олимпиадного типа.[18] Предполагалось, что победитель олимпиад верхних уровней уже представляет собой *идеального решателя задач*, которого далее, в высшем образовании, нужно только направить на нужный круг задач и снабдить соответствующими знаниями.[19]

— *Специализированные физико-математические школы*. Среди них можно выделить стационарные (в том числе интернаты) и интенсивные (летние).

Программы специализированных школ включали в себя углублённое изучение точных наук (с включением элементов высшей математики), кружковую работу с поощрением самостоятельного выбора сложных задач, знакомство с горизонтами поиска современной науки.

Летние школы дополнительно представляли собой помещение в социальное пространство, близкое к тому, которое формировалось в ведущих исследовательских институтах и конструкторских бюро.

Кроме содержания, выходящего за пределы школьного, как особенности таких школ можно отметить [19]:

— культ решения сложных задач и особую гордость (вплоть до осознания собственной элитарности) по поводу своей способности решать такие задачи;

— включение студентов соответствующих специальностей в качестве педагогов, не только преподавателей, но и воспитателей (в интернатах и летних школах), транслирующих нормы коммуникации, принятые среди научных и научно-инженерных сообществ, круг жизненных приоритетов и культурных интересов;

---

[18] См, например, [37], статья «Математические олимпиады школьников».

[19] В такой системе подготовки (как и в системе подготовки спортсменов рекордного уровня и выдающихся мастеров-исполнителей в искусстве) содержится значительный риск деформации личностных установок, включая полное пренебрежение социальным окружением и контекстами.

— включение в непосредственную коммуникацию со школьниками учёных, уже имеющих реальные достижения и общезначимые тематики исследований и разработок.

Отдельно можно выделить *специализированные издания*, ориентированные на изложение в доступной школьникам форме материала, выходящего за пределы школьного, в том числе современных научных достижений. Такие издания были ориентированы на читателя, заведомо готового разбираться в сложных темах.[20]

На основе общей математической дидактики была выстроена система форм, направленных на отбор и поддержку математически одарённых школьников.

— **Задача повышенной сложности**. Требует нестандартного применения известных способов или узнавания условий их применения.

— **Олимпиадная задача**. Требует композиции известных способов, часто с обращением к разным разделам математики, и комбинации общих методов с неформальными схемами, такими, как полный перебор вариантов.

— **Задача с неопределёнными параметрами**. Задача решается через интуитивную догадку и логическое обоснование вывода на основе заданных условий.[21] Может моделировать известную историческую задачу, демонстрирующую красоту математики.

Работа учителя с подобными задачами рассматривалась как особое искусство педагога, её невозможно было нормировать, к ней невозможно было подготовить.

Новые контексты и приоритеты

Современная ситуация вокруг математического образования складывается из следующих обстоятельств.

Прежде всего, изменился сам характер применения математики в технических и управленческих решениях.

1. Предыдущее поколение технологий предполагало, что математическая модель сложного устройства присутствует в мышлении технологов, конструкторов, но не в самом устройстве. Современные устройства со встроенными системами автоматического управления, особенно программируемые, содержат математическую модель «в себе»[22] и требуют математической квалификации от пользователя.

2. Практики, напрямую не связанные с техническими решениями в узком смысле, строятся на основе сложных математических моделей (экономическое и социальное планирование, организация транспортных потоков и инфраструктур жизнеобеспечения).

3. Современная математика сегментирована на разделы «чистой» и «прикладной» математики, в том числе как отдельная область выделилась «теоретическая информатика» (computer science). Внутри «прикладной» математики основным видом деятельности является постановка задач на основе анализа ситуации и поиск способов их решения (в том числе с использованием существующих моделей из разных областей математики), а не построение обобщённых моделей и исследование их свойств.[23]

Кроме того, изменились социальные и антропологические контексты.

1. При «ручных» технологиях обработки информации элементарная грамотность могла обеспечить минимум социализации; этапы освоения арифметики и алгебры соответствовали социальным ступеням:

— устный счёт — умение сосчитать деньги, базис экономической успешности;

---

[20] Наиболее популярные — журнал «Квант», книжная серия «Библиотечка журнала Квант».

[21] Логическая структура таких задач и их дидактические возможности подробно проанализированы Д. Пойа [26] и Р. Смоллианом [32, 33].

[22] На профессиональном сленге разработчиков таких устройств, от «умных» телефонов до «умных» домов и систем управления транспортными потоками, математика «вшита» в эти устройства.

[23] Говоря метафорически, результатом работы современного математика являются не теоремы, а алгоритмы; теоремы нужны для того, чтобы убедиться, что алгоритмы правильно работают. [7]

— счёт «на бумажке» — умение рассчитать бюджет, возможность работать счетоводом или делопроизводителем;

— счёт по формулам — технолог или планировщик;

— преобразование формул, связь с чертежами — начала инженерного образования.

В настоящее время важным остаётся умение понимать формулы и как схемы вычислений, и как модели, позволяющие выразить структуру природных и технических процессов в виде величин и их отношений, максимально точно понимать характер этих процессов. Но навык счёта с его сложной иерархией инструментов остаётся в прошлом.

2. Современный ребёнок и, тем более, подросток обучен мыслить значениями, выражающимися в последовательностях образов, а не в грамматических конструкциях. С точки зрения чистого математического содержания, этот тип мышления куда ближе к античной геометрии (с визуализацией всех построений), чем к современной математике, в основе которой лежат алгебраические конструкции.[24]

В то же время алгебраическая составляющая математического знания стремится стать ведущей, в том числе захватить всё академическое математическое образование, в то время как исходно алгебра рассматривалась лишь как удобный инструмент для сокращения рассуждений, имеющих в основе геометрические построения.[25]

Цифровые вычислительные машины легко программируются на решение задач, связанных с преобразованиями чисел, формул и формально организованных высказываний — наиболее естественным было бы усиливать в математическом образовании способность работать с образами и оформлять интуитивные решения, чтобы превратить их в программы. Но существующее математическое образование по-прежнему делает акцент на технику вычислений и формальных преобразований.

3. В современной культуре утрачивается единство картины мира, и даже единство принципа, на котором эта картина мира выстроена. В элитарных формах это реализуется как критика принципов рациональности, дробления научной картины мира на множество конкурирующих школ и подходов. В массовой культуре такое же дробление связано с феноменом лженауки, с утратой различий между наукой и магией, между достоверными и вымышленными фактами. Если на уровне конкурирующих научных школ и подходов всё же применимы общие критерии научной рациональности, то в массовом сознании любое содержание, выдающее себя за «школьное», претендует быть научным.

Это тем более опасно, что современные технические решения, материализующие научную и инженерную рациональность, реализованные на их основе устройства и инфраструктуры требуют рационального мышления не только от разработчиков, но и от пользователей.

Такой идеал рациональности должна задавать не формальная логика, дефицит которой — произвольность посылок любого рассуждения, и не какая-либо наука, обращённая к объективной действительности — именно вследствие постоянного появления новых фактов, усомнения постулатов и обновлениям парадигм.

Этот идеал рациональности должна задавать математика — но не как прикладная формальная логика и искусство формальных преобразований, но как искусство моделировать действительные отношения и процессы. Отсюда можно сформулировать современные цели развития и поддержки математических способностей.

---

[24] Мы можем сравнить хотя бы античные построения, связанные с бесконечно малыми величинами [35], и соответствующие рассуждения в современных учебниках математического анализа.

[25] По меткому замечанию В. А. Арнольда, *все группы являются группами каких-либо преобразований, но только алгебраисты это тщательно скрывают от непосвящённых* [1]. В формально-теоретическом подходе математический объект, построенный как инструмент решения достаточно широкого класса задач, претендует на самостоятельность, его исследование выделяется в автономную область науки, выстраивающую свой язык и свои правила рассуждений, «недоступные прикладникам».

1. Математические способности рассматриваются как основа для рационального мышления, формирования критериев рациональности знания в разных сферах профессиональной деятельности и в формировании жизненных стратегий в целом.

Дополнительное образование здесь может ставить следующие задачи:

— Формирование базовых приёмов рационального рассуждения, анализа и аргументации на материале практических, в том числе «житейских» задач, разрешаемых при помощи математических знаний и интуиции; для этого нужно создание основы математических способностей у тех подростков и юношей, кто в целом не связывает своё будущее с математикой и профессиями, использующими математическое знание, но нацелен на практики, требующие рационального и осмысленного принятия решений, на практики управления.

— Формирование вкуса к сложному мышлению (на материале необычных задач, поиска неочевидных связей и отношений). В первую очередь такое дополнительное образование должно помогать подросткам и юношам, обладающим сложной внутренней жизнью, развитой способностью к эмоциональному включению сопереживанию, и должно помогать в оформлении переживаний в задачи, формирование конструктивных решений, что актуально для творческих практик и практической психологии.

Такое дополнительное образование может быть *дважды дополнительным*, по отношению к образованию, направленному на включение в современные гуманитарные практики, или быть дополнительным для гуманитарных профилей.

Здесь уместно движение от содержательно-эмпирического подхода к освоению основ содержательно-теоретического, с примерным пониманием роли математического формализма, без его виртуозного освоения.

Наиболее зарекомендовавшие себя формы здесь — художественные сюжеты, содержащие в своей основе математические проблемы; наиболее очевидны детективные сюжеты, связанные с криптографией[26], произведения, в которых разрешение коллизии опиралось на понимание того, что внешне бессмысленный набор знаков представляет собой зашифрованный текст, и разгадку шифра. Хорошей образовательной формой является клуб любителей подобных сюжетов, возможно, с соревнованиями на лучшего дешифровщика.

Современный вариант такого проекта — сеть клубов любителей сериала «Числа» («Numbers»), выходившего в США на канале CBS с 2005 по 2010 год (подробно описан в [3]). Трансляция детективного сериала, сюжеты которого построены на прикладных математических задачах (например, поиск маньяка по статистическому анализу факторов, побуждающих его на преступление) сопровождалась рассылкой методических текстов по сети учителей математики, опоры для работы кружков любителей «Чисел».

2. Математика рассматривается как универсальный язык для понимания природных, технических, экономических законов. Необходимо развитие способности переходить от практических моделей, используемых в «науках о реальности», к математическим моделям, с возможностью использовать математический формализм для преобразования этих моделей и поиска практически применимых мышлений.

Отметим, что единственная область приложений, математический аппарат которой представлен в школьной программе — физика, в особенности механика, электродинамика, теория колебаний, построенные на применении аппарата дифференциальных уравнений. Но большинство этих разделов изучаются <u>до</u> того, как осваиваются хотя бы основы дифференциального и интегрального исчисления, что приводит к огромным трудностям в освоении основных понятий физики большинством школьников.

---

[26] Из классики можно упомянуть Эдгара Алана По («Золотой жук»), Артура Конан Дойля («Пляшущие человечки»), Жюля Верна («Дети капитана Гранта», «Жангада»).

Другие же области приложений математики, сформировавшиеся в течение XX века и продолжающие активно развиваться, остаются за пределами школьной программ. Роль математики в формировании современной научной картины мира (как и вообще единство картины мира) остаётся за рамками школьной программы и может быть восстановлена лишь программами дополнительного образования.

Здесь наиболее эффективно движение в содержательно-теоретическом подходе, с освоением формально-теоретического, как комплекса инструментов, позволяющих выполнять выполнение преобразований модели *точно* и *быстро.*

Наиболее этот подход проработан в формах дополнительного образования, связанного с техническим творчеством: прежде чем создать новую конструкцию хотя бы в модели,[27] её необходимо точно рассчитать, с учётом нюансов, заведомо выходящих за рамки школьной математики. Точно так же он может использоваться в исследовательской деятельности, в том числе с гуманитарными исследованиями «в поле».[28]

Другие зарекомендовавшие себя формы здесь — компьютерные игры, в том числе командные, основанные на сложных математических моделях:

— экономические игры, моделирующие сложное взаимодействие между субъектами экономики в виртуальном сетевом государстве;

— военно-тактические симуляторы (World of Tanks, Battleship), основанные на точных математических описаниях реальной военной техники и театров боевых действий;

— «интегральные» стратегические игры (SymCity, Civilization), требующие одновременной оценки многих численно выраженных параметров и их связей;

— игры–приключения, требующие решения сложных задач-головоломок разного рода (в том числе логических, теоретико-информационных, теоретико-механических).

Дополнительно можно указать логические игры и головоломки.

Классические логические головоломки, построенные на сюжетах о «лжецах и правдецах», были систематизированы и проанализированы Р. Смаллианом. В частности, им было показано, как через решение серии таких головоломок современный студент или школьник может понять парадоксы классической схоластики и освоить математическую логику, вплоть до теоремы Гёделя о неполноте формальных исчислений [32, 33].

Существуют также ситуационные задачи, где необходимо восстановить причинно-следственную связь событий, задавая лишь вопросы, допускающие ответ «да» или «нет». Такие задачи были придуманы для обучения будущих следователей и криминалистов, но популярны также в сообществах студентов-математиков. [29]

---

[27] А тем более, действующую техническую конструкцию, с требованиями эффективности, прочности, надёжности — что особенно хорошо заметно в технических видах спорта, требующих создания устройств собственными руками, например, в картинге и багги.

[28] Впечатляющий, но не описанный пример: исследование распределения Ципфа-Парето на материале анализа цен на рынке в областном центре.

[29] Такие задачи, по нашим данным, нигде не описаны, поэтому приведём несколько примеров.

Сосуд разбился, она умерла. Решение: она — рыбка из разбившегося аквариума.

После тушения лесного пожара на дереве был обнаружен мёртвый человек в плавках и акваланге. Решение: самолёты-амфибии, которые используются при тушении лесных пожаров, набирают воду в резервуары на реке или озере, а затем выливают её на горящий лес. Дайверу не повезло, он попал в резервуар и был сброшен на лес вместе с водой.

Некоторые задачи такого типа строятся на метафорах, и решающий должен ещё понять, идёт ли речь о реальной ситуации или используется идиома. Например:

Дверь открыли, топор упал. Решение: в комнате было столь душно, хоть топор вешай. Он и висел.

В обстоятельствах стихийного бедствия служитель церкви воспользовался неадекватным транспортным средством для быстрого перемещения. Решение: гром гремит, земля трясётся, поп на курице несётся.

Решение таких задач тренирует культуру логической дихотомии. При коллективном решении дополнительно обнаруживается, что участники должны помнить, что уже известно, а что неизвестно, и строить логическую карту события.

Перспективные практики дополнительного образования в области математики

Интенсивные школы наиболее продуктивны как практика дополнительного образования. Позволяют:

— обеспечить равную доступность качественного образования для школьников из разных территорий (в том числе удалённой сельской местности с низкой транспортной связностью, детских домов и иных редуцированных жизненных и культурных сред), с определёнными образовательными запросами;

— поместить школьников в социальные и культурные формы, в которых именно их способности и вытекающие из этих способностей жизненные ориентиры и притязания являются наиболее приемлемыми и поощряемыми;

— обеспечить интенсивное проживание современных форм продуктивной деятельности, связанных с актуализацией, развитием и применением способностей; в случае с математикой — полевые исследования, технические разработки, решение сложных задач, требующих математического моделирования, в том числе численного моделирования и программирования.[30]

Но интенсивные школы являются также и наиболее затратными:

— издержки на проезд, проживание и питание участников, в том числе из отдалённых территорий, на оборудование и инфраструктуру;

— издержки на привлечение высококвалифицированных специалистов, как учёных, так и специалистов по организации содержательного культурного досуга;

— затраты на разработку образовательных программ; даже если они строятся по типовым схемам [27], необходима адаптация к месту проведения, особенностям целевой аудитории, составу приглашённых специалистов; для того, чтобы основной состав педагогической команды мог поддерживать тонус и не терять интереса, необходимо, чтобы обновлялись содержательные задачи.

Элективные курсы, в условиях профильной школы, позволяют удобно упаковать программы интенсивных школ — но без соответствующих издержек [28].

В отличие от интенсивной школы, где образовательное содержание может быть в равной степени представлено заданиями, составом преподавателей, организацией уклада (как в учебной деятельности, так и жизни вне учебного процесса), в элективном курсе образовательная задача должна задавать:

— *тему*, сформулированную в виде общезначимого противоречия, с указанием на предметные области, которые позволяют уточнить и разрешить это противоречие;[31]

— *последовательность шагов*, позволяющих выйти из противоречия в продуктивное действие: оформление проблемы, выделение содержательных задач в рамках обшей проблемы; формирование версий решений задач; обнаружение содержательных дефицитов и поиск источников, позволяющих решить задачи; обнаружение частных решений.

---

[30] Например, на основе ГИС построить карту конкретной территории; реконструировать динамику цен на ревень и черемшу на фоне общих экономических процессов и стоимости потребительской корзины; рассчитать полёт ракеты до Луны, для советских лунных проектов и проекта «Аполлон».

[31] Например: *точка — это математическое понятие; зрение описывается законами как физики, так и биологии, и психологии; возможно ли построить точное научное понятие* ***точки зрения****? В идеале — построить исчисление точек зрения, сопоставимое с алгеброй, позволяющее соотносить разные точки зрения в одном пространстве.*

При наличии достаточного количества сходных задач, на уровне муниципальной или региональной системы образования может быть запущена олимпиада, ориентированная на большее владение научным предметным знанием и способами деятельности, на оценку компетентности [6, 28, 30].

Но элективные курсы (особенно при их совмещении в новое олимпийское движение) требуют больших затрат на разработку, в сравнении с интенсивными школами:

— необходимо компенсировать отсутствие значимых носителей предметного знания квалификацией преподавателя, ведущего такой элективный курс, учебными текстами и методическими разработками;

— необходимо компенсировать отсутствие целостного уклада формами организации взаимодействия внутри курса, между учениками и преподавателем;

— необходимо удержать временную динамику, случающуюся в условиях интенсивной школы естественным образом, искусственно, через возможность восстановить контекст для каждого следующего шага после временного разрыва.

Клуб (или, в старой терминологии, *кружок*) можно считать *минимальной* формой дополнительного образования, ориентированной на предметность и могущей работать на поддержку (но на формирование) способности. Клуб как не обязательная форма деятельности привлекателен тем, кто руководствуется своими интересами, выходящими за пределы повседневных обязательств и требований.

Математический клуб может быть развёрнут для любого возраста, например, как:

— *Клуб реконструкции математических сюжетов*, восстанавливающий математические задачи из художественной литературы либо кинематографа (в том числе задачи не очевидные и не тривиальные).[32]

— *Исследовательский клуб*, включающийся в сетевые сообщества научных обществ учащихся. Такие клубы могут строиться как вокруг задач, связанных с эстетикой математики (но тогда они будут, скорее всего, воспроизводить уже известные результаты), так и с решением прикладных задач на местности.[33]

— *Клуб участников сетевой игры*, обсуждающий правила игры, закономерности игрового мира и устройств, присутствующих в игровом мире, устраивающий внутренние соревнования и оценивающий их результаты в том числе по тому, кто из участников как может оценить математические закономерности мира.

— *Клуб любителей логических игр и головоломок,* где принципиально не само по себе разгадывание головоломок как увлекательная интеллектуальная игра, но и описание схем рассуждений, позволяющих эффективно разгадывать головоломки.

Здесь принципиально важно:

— педагог, организующий клуб, должен ориентироваться в необходимой математике и в предметной действительности, по поводу которой строится клуб;

— в частности, ввиду актуальности сетевых игр для современных подростков, педагог сам должен быть если не фанатом, то любителем таких игр и уметь заразить школьников своим энтузиазмом;[34]

---

[32] Классический пример такой задачи — расчёт контура вращения варенья внутри Карлсона, стабилизирующего поворотный момент от вращения винта, с поправкой на инерционный момент, создаваемый комплекцией Карлсона. Дополнительно можно оценить эффективность варенья в качестве топлива для мотора в сравнении, например, с бензином.

[33] Например, задача транспортной логистики, связности и оптимизации трафика в крупном городе; оценка экономически оптимального набора агрокультур в сельской местности.

[34] Например, пониманием, что «Цивилизация» — это не непрерывные сражения, а расчёт экономики, баланса гуманитарных и технологических открытий и довольства нации, из которых следуют, в том числе, победы в сражениях.

— при организации исследовательской группы педагог должен быть сам любознателен и заинтересован в результате исследований.[35]

Общие выводы:

Мы рассматриваем математические способности как:

— возможность выделить формальную структуру ситуации, различить известное и неизвестное, построить связи и отношения известного и неизвестного;

— для этого использовать формальный аппарат и язык, позволяющий строить модель как набор идеальных объектов с известными свойствами и отношениями;

— на основе известных свойств и отношений идеальных объектов, найти неизвестные величины и отношения, возможно, обнаружив новые свойства, сформулировав и обосновав их.[36]

Для того, чтобы работать с этими способностями, педагог должен:

— иметь собственный опыт движения от ситуации к её моделированию, формальной постановке задачи и её решению вплоть до обоснованной закономерности и ответа в виде найденного количества, фигуры или схемы, и вкус к мышлению такого рода;

— быть энтузиастом, уметь радоваться новой задаче, и уметь транслировать эту радость ученикам, с обоснованием того, почему эта задача интересна и чем её решение может быть полезно, как практически, так и для развития (или приведения в порядок) ума;

— уметь признавать ученика не менее умным и сообразительным, чем учитель, и соответствующим образом строить формы продуктивного обсуждения, сохраняя свой авторитет в качестве носителя знаний и того, кто умеет управлять коммуникацией.

Используемые образовательные формы должны:

— не только допускать, но требовать и поощрять активность собственного ума ученика в поиске нетривиальных решений;

— позволять прямую конкуренцию не только учеников между собой, но и учеников с учителем в изобретательности, конструировании решений и их обосновании;

— задавать приоритет самооценки над экспертной оценкой результата, с подробным разбором достижений и ошибок при решении задачи.

Для конструирования продуктивных образовательных форм необходимо:

— понимать последовательность задач, позволяющих освоить тип математического рассуждения и, возможно, необходимый тип формализма (в зависимости от установки на занимательность, освоение общей математической грамотности, профессионализацию в самой математике или областях её применения);

— понимать противоречия, способные спровоцировать школьников разных возрастов и имеющих разные учебные (а в подростковом и юношеском возрасте — жизненные) установки, интерес к исследованию ситуаций и превращению их в математические задачи, уметь выстроить интригу;

— уметь импровизировать, не ограничиваться лишь известными образовательными формами, но конструировать их на основе понимания возрастных особенностей учеников,

---

[35] На практике от оформления исследовательских работ школьников требуется соблюдение последовательности «актуальность — проблема — гипотеза — цель» и так далее. Это характерно для педагогических текстов, претендующих на научность. Для иных дисциплин это не характерно: замечено, что большинство филологических работ начинаются с *известно, что*, а математических работ — с *пусть.* Прикладные работы начинаются, как правило, с фиксации: *заметили эффект, и объяснили его.*

[36] Наиболее интересные теоремы, описывающие всеобщие свойства математических объектов, рождались из решения прикладных задач. От теоремы Пифагора, обосновывающей «египетский треугольник», до, например, теоремы Коши-Пикара об условиях существования и единственности дифференциального уравнения, появившейся из задачи предсказания движения планет и инсайта И. Ньютона («Законы природы описываются дифференциальными уравнениями»). [1]

спектра их приоритетов, амбиций и жизненных стратегий (в подростковом и юношеском возрасте), одновременно удерживая содержание математики как особенную культурную ценность и математику в целом как особенный тип мышления.

Литература и источники

1. Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М., 1986.
2. Асмолов А. Г. Культурно-историческая психология и конструирование миров. М.–Воронеж, 1996.
3. Бёрд Киви. «4исла со смыслом» // Компьютерра, № 12, 2007. — Электронный ресурс: http://old.computerra.ru/316706.
4. Вертгеймер М. Продуктивное мышление. — М., 1987.
5. Гейзенберг В. Шаги за горизонт. — М., Прогресс, 1986.
6. Глухов П.П. Компетентностные испытания как современная форма оценки образовательных достижений // Журнал «Философия образования». – Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2016. – №4(67)
7. Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О. Конкретная математика. Основание информатики. — М.: 1998.
8. Давыдов В. В. Теория развивающего обучения. — М., 1996.
9. Декарт Р. Правила для руководства ума. // Декарт Р. Сочинения, т. 1. — М., 1989.
10. Деменюк С. Л. Фрактал: между мифом и ремеслом. — СПб: 2011.
11. Дусавицкий А. К. 2×2=?. — М., 1986.
12. Ефимов В. С., Лаптева А. В., Ермаков С. В. и др. Возможные миры: инициация творческого мышления. М.: ИНТЕРПРАКС, 1994.
13. Кант И. Пролегомены ко всякой будущей метафизике, которая может появиться как наука. // Кант И. Сочинения, в 8 т. Т. 4. — М.: 1994.
14. Клейн М. Математика. Поиск истины. — М.: Мир, 1988.
15. Крылов А. Н. Значение математики для кораблестроения. // Крылов А.Н. Мои воспоминания. / Составители: Н.И. Барбашев и С.А. Шерр. — М.: 1963.
16. *Лакатос И. Доказательства и опровержения. Как доказываются теоремы. — М.: Наука, 1967.
17. *Левинова Л. А., Сапгир Г. И. Приключения Кубарика и Томатика, или весёлая математика. — М.: 1975.
18. Лейтес Н. С. Возрастная одарённость и индивидуальные различия. — М.-Воронеж, 1997.
19. Летние школы. Организация. Обучение. Воспитание. — Межвуз. сб. / под ред. О. В. Бытева. — Красноярск, 1988.
20. Лёвшин В. Фрегат капитана Единицы. — М.: 1979.
21. Лёвшин В. Магистр рассеянных наук. Математическая трилогия. — М.: 1987.
22. Начала Евклида. Перевод с греческого и комментарии Д. Д. Мордухай-Болтовского при редакционном участии И. Н. Веселовского и М. Я. Выгодского. — М.-Л.: 1949–1951.
23. Пиаже Ж. Генезис числа у ребёнка. // Пиаже Ж. Избранные психологические труды. — М.: 1994.
24. Платон. Теэтет. // Платон, соч., т. 2. — М., 1993.
25. Платон. Тимей. // Платон, соч., т. 3. — М., 1994.
26. Пойа. Математика и правдоподобные рассуждения. — М., 1975.
27. Открытая модель дополнительного образования региона / Науч. ред. А. А. Попов, И. Д. Проскуровская. — Красноярск, 2004.

28. Попов А. А. Образовательные программы и элективные курсы компетентностного подхода. / Предисловие В. А. Болотова, составители М. С. Аверков, С. В. Ермаков. — М., 2014.
29. Попов А. А., Ермаков С. В. Культурно-историческая теория Л. С. Выготского и третье поколение антропо-практик развития. — Красноярск, 2014.
30. Попов А. А., Ермаков С. В., Реморенко И. М. Проект «Оценка компетентностных результатов и достижений. — в сб.: Попов А. А. Открытое образование как практика самоопределения. — М., Некоммерческое партнёрство «Авторский клуб», 2015.
31. Розин В. М. Логико-семиотический анализ знаковых средств геометрии (к построению учебного предмета). // Педагогика и логика. — М., 1993.
32. Смаллиан Р. Принцесса или тигр? — М., 1978.
33. Смаллиан Р. Как же называется эта книга? — М., 1981.
34. Фейнман. Вы, конечно, шутите, мистер Фейнман! — М, 2012.
35. Щетников А. И. Пифагорейское учение о числе и величине. — Новосибирск, 2001.
36. Энгельс Ф. Анти-Дюринг. — М.: 1987.
37. Энциклопедический словарь юного математика. / Сост. Савин А. П. — М.: 1989.